树Tree

定义：树是非线性结构，是n个（n≥0）元素的集合。

n为0时，称为空树。

树中只有一个特殊的没有前驱的元素，称为树的根 Root。

树中除了除了根结点外，其余元素只能有**一个前驱**，可以有零个或多个后继。

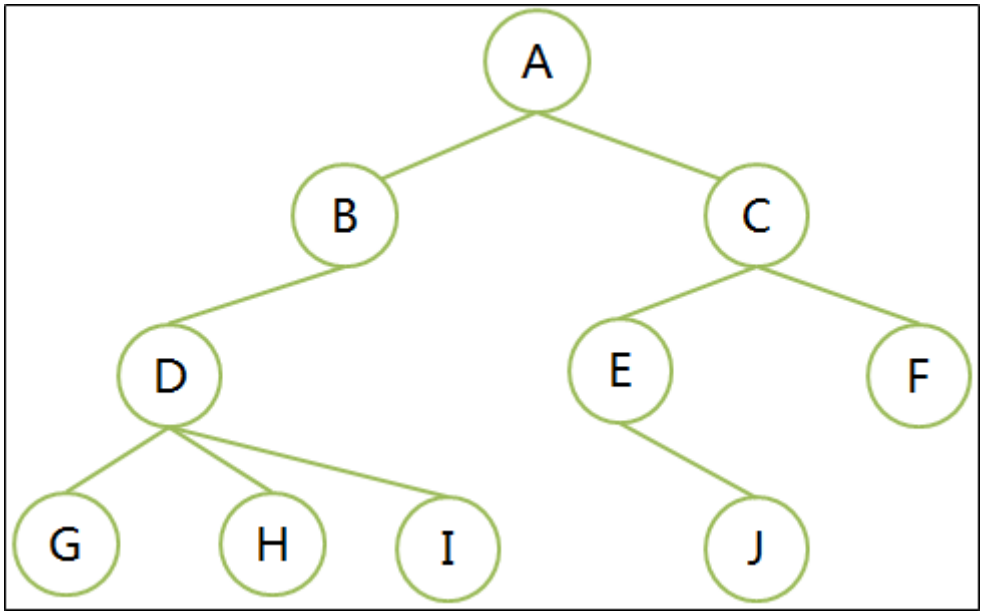
递归定义：树T是n(n≥0)个元素的集合。n=0时，称为空树。

有且只有一个特殊元素根，剩余元素都可以被划分为m个互不相交的集合T1、T2、T3、...、Tm，而每一个集合都是树，称为T的子树Subtree。

子树也有自己的根。

名词解释

- 结点：树中的数据元素
- 结点的度degree：结点拥有的子树的数目称为度，记作d(v)
- 叶子结点：结点的度为0，称为叶子结点leaf、终端结点、末端结点
- 分支结点：结点的度不为0，称为非终端结点或分支结点
- 分支：结点之间的关系
- 内部结点：除根结点外的分支结点，当然也不包括叶子结点
- 树的**度**是树内各结点的度的最大值。D结点度最大为3，树的度数就是3



- 孩子（儿子Child）结点：结点的子树的根结点成为该结点的孩子
- 双亲（父Parent）结点：一个结点是它各子树的根结点的双亲
- 兄弟（Sibling）结点：具有相同双亲结点的结点
- 祖先结点：从根结点到该结点所经分支上所有的结点。A、B、D都是G的祖先结点
- 子孙结点：结点的所有子树上的结点都称为该结点的子孙。B的子孙是D、G、H、I
- 结点的层次（Level）：根节点为第一层，根的孩子为第二层，以此类推，记作L(v)

- 树的深度（高度Depth）：树的层次的最大值。上图的树深度为4
- 堂兄弟：双亲在同一层的结点

- 有序树：结点的子树是有顺序的（兄弟有大小，有先后次序），不能交换。
- 无序树：结点的子树是有无序的，可以交换。

- 路径：树中的k个结点n1、n2、...、nk，满足ni是n(i+1)的双亲，称为n1到nk的一条路径。就是一条线串下来的，前一个都是后一个的父（前驱）结点。
- 路径长度=路径上结点数-1，也是分支数

- 森林：m(m≥0)棵不相交的树的集合
    - 对于结点而言，其子树的集合就是森林。A结点的2棵子树的集合就是森林

特点

- 唯一的根
- 子树不相交
- 除了根以外，每个元素只能有一个前驱，可以有零个或多个后继
- 根结点没有双亲结点（前驱），叶子结点没有孩子结点（后继）
- vi是vj的双亲，则L(vi) = L(vj)-1，也就是说双亲比孩子结点的层次小1

二叉树

概念

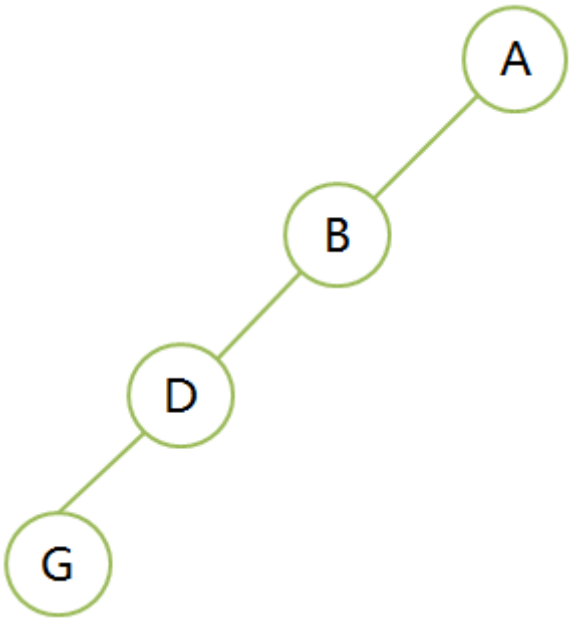
- 每个结点最多2棵子树
- 二叉树不存在度数大于2的结点
- 它是有序树，左子树、右子树是顺序的，不能交换次序
- 即使某个结点只有一棵子树，也要确定它是左子树还是右子树

二叉树的五种基本形态

- 空二叉树
- 只有一个根结点
- 根结点只有左子树
- 根结点只有右子树
- 根结点有左子树和右子树

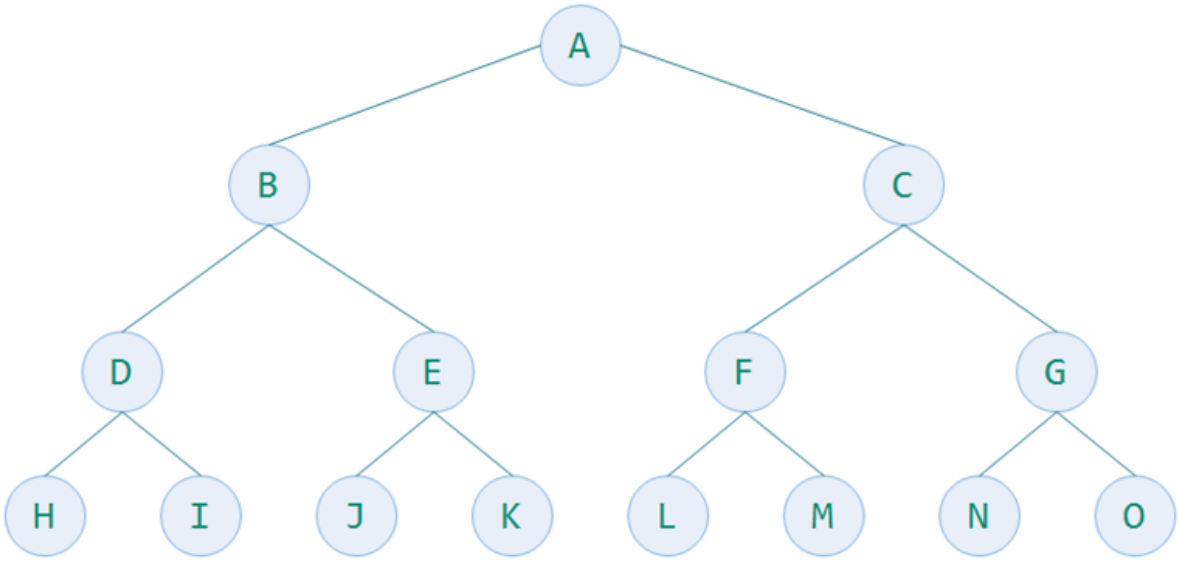
斜树

左斜树，所有结点都只有左子树；右斜树，所有节点都只有右子树



满二叉树

- 一棵二叉树的所有分支结点都存在左子树和右子树，并且所有叶子结点只存在在最下面一层
- 同样深度二叉树中，满二叉树结点最多
- k为深度（1≤k≤n），则结点总数为2^k-1
- 如下图，一个深度为4的15个结点的满二叉树



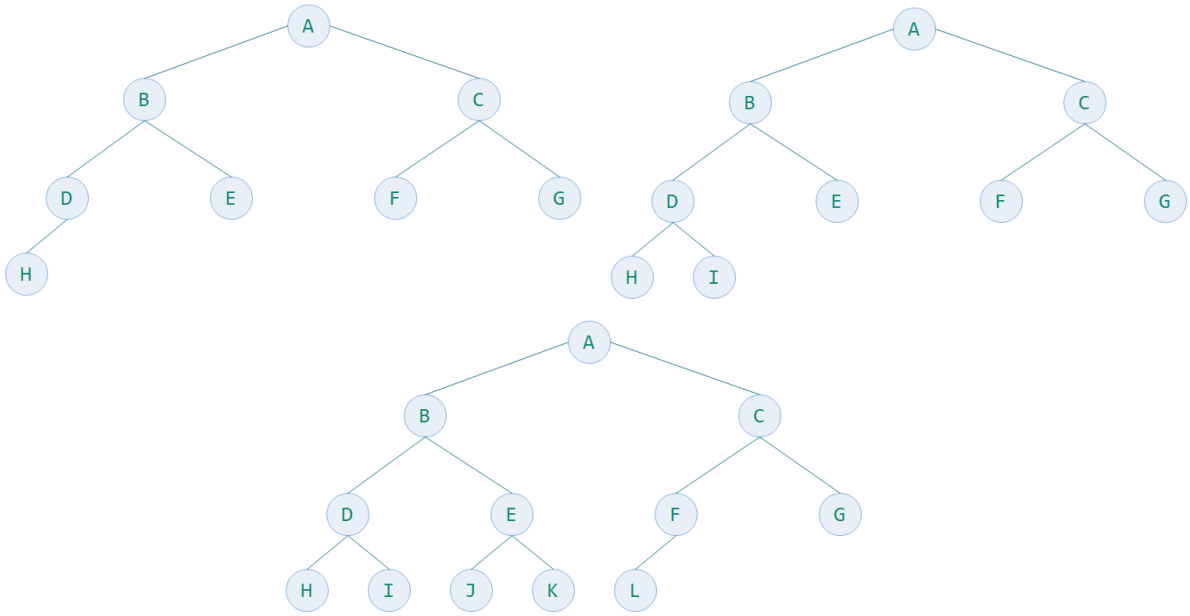
完全二叉树

完全二叉树Complete Binary Tree

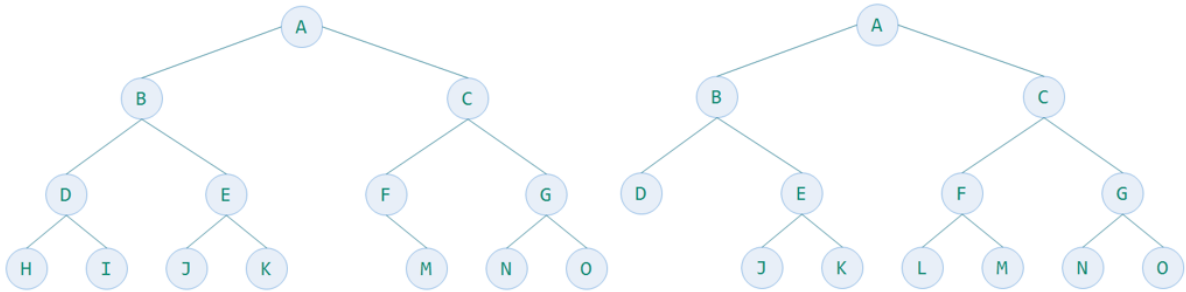
- 若二叉树的深度为k，二叉树的层数从1到k-1层的结点数都达到了最大个数，在第k层的所有结点都集中在最左边，这就是完全二叉树
- 完全二叉树由满二叉树引出
- 满二叉树一定是完全二叉树，但完全二叉树不一定是满二叉树

- k为深度（1≤k≤n），则结点总数最大值为2^k-1，当达到最大值的时候就是满二叉树

下图三个数都是完全二叉树，最下一层的叶子结点都连续的集中在左边

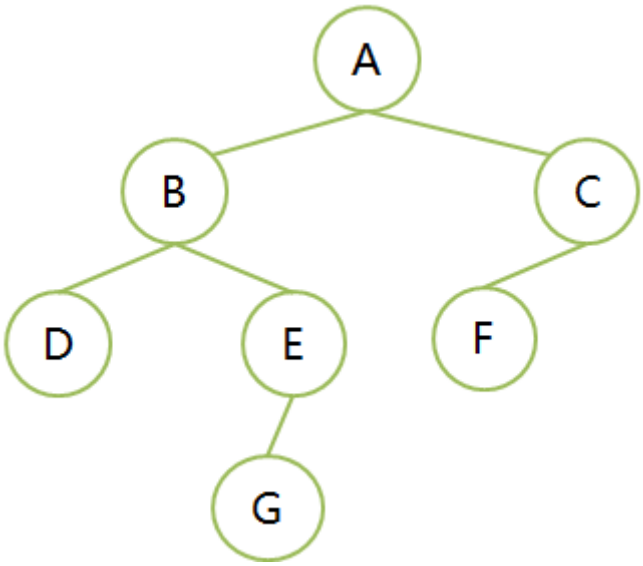


下面2个树是完全二叉树吗?



上图的树都不是完全二叉树，它们叶子节点都没有集中到左边。

性质



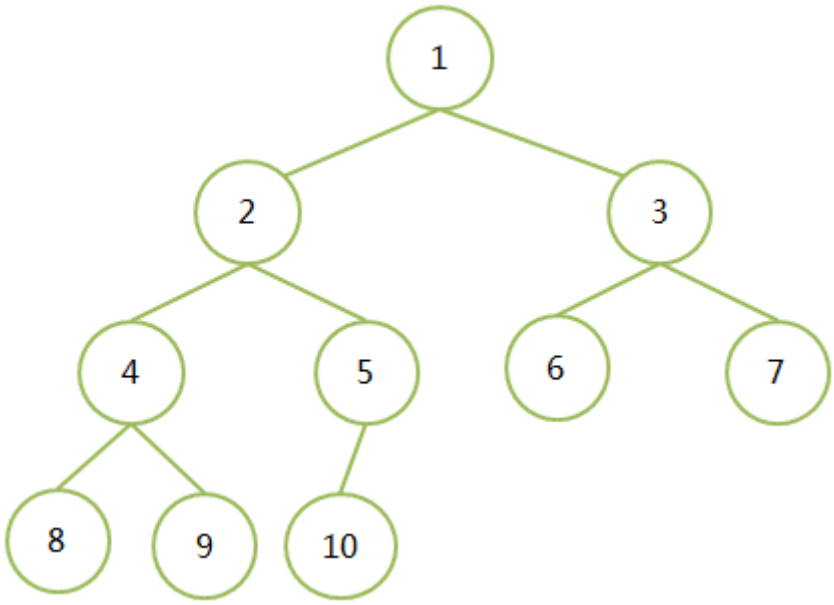
- 性质1：在二叉树的第i层上至多有2^(i-1)个结点(i≥1)
- 性质2：深度为k的二叉树，至多有2^k-1个节点(k≥1)
    - 一层 2-1=1

    - 二层 4-1=1+2=3
    - 三层 8-1=1+2+4=7
- 性质3：对任何一棵二叉树T，如果其终端节点数为n0，度数为2的结点为n2，则有n0=n2+1
    - 换句话说，就是叶子结点数-1就等于度数为2的结点数
    - 证明
        - 总结点数为n=n0+n1+n2，n1为度数为1的结点总数
        - 一棵树的分支数为n-1，因为除了根结点外，其余结点都有一个分支，即n0+n1+n2-1
        - 分支数还等于`n0*0+n1*1+n2*2`，n2是2分支结点所以乘以2，2*n2+n1
        - 可得2*n2+n1=n0+n1+n2-1 => n2=n0-1

其他性质

- 高度为k的二叉树，至少有k个结点
- 含有n（n≥1）的结点的二叉树高度至多为n。和上句一个意思
- 含有n（n≥1）的结点的二叉树的高度至多为n，最小为math.ceil($\log_2$ (n+1))，不小于对数值的最小整数，向上取整
    - 假设高度为h，2^h-1=n => h = $\log_2$ (n+1)，层次数是取整。如果是8个节点，3.1699就要向上取整为4，为4层

- 性质4：具有n个结点的完全二叉树的深度为int($\log_2$n)+1或者math.ceil($\log_2$(n+1))



- 性质5:
    - 如果有一棵n个结点的完全二叉树（深度为性质4），结点按照层序编号，如上图
    - 如果i=1，则结点i是二叉树的根，无双亲；如果i>1，则其双亲是int(i/2)，向下取整。就是子节点的编号整除2得到的就是父结点的编号。父结点如果是i，那么左孩子结点就是2i，右孩子结点就是2i+1
    - 如果2i>n，则结点i无左孩子，即结点i为叶子结点；否则其左孩子结点存在编号为2i
    - 如果2i+1>n，则结点i无右孩子，注意这里并不能说明结点i没有左孩子；否则右孩子结点存在编号为2i+1

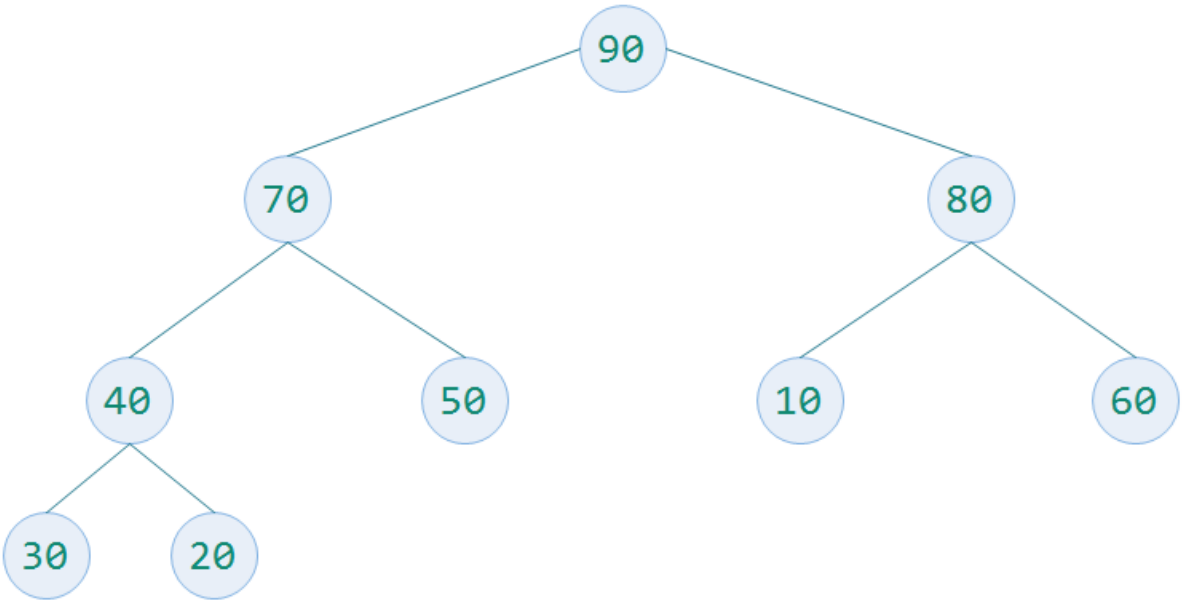
堆heap

堆Heap

- 堆是一个完全二叉树
- 每个非叶子结点都要大于或者等于其左右孩子结点的值称为大顶堆
- 每个非叶子结点都要小于或者等于其左右孩子结点的值称为小顶堆
- 根结点一定是大顶堆中的最大值，一定是小顶堆中的最小值

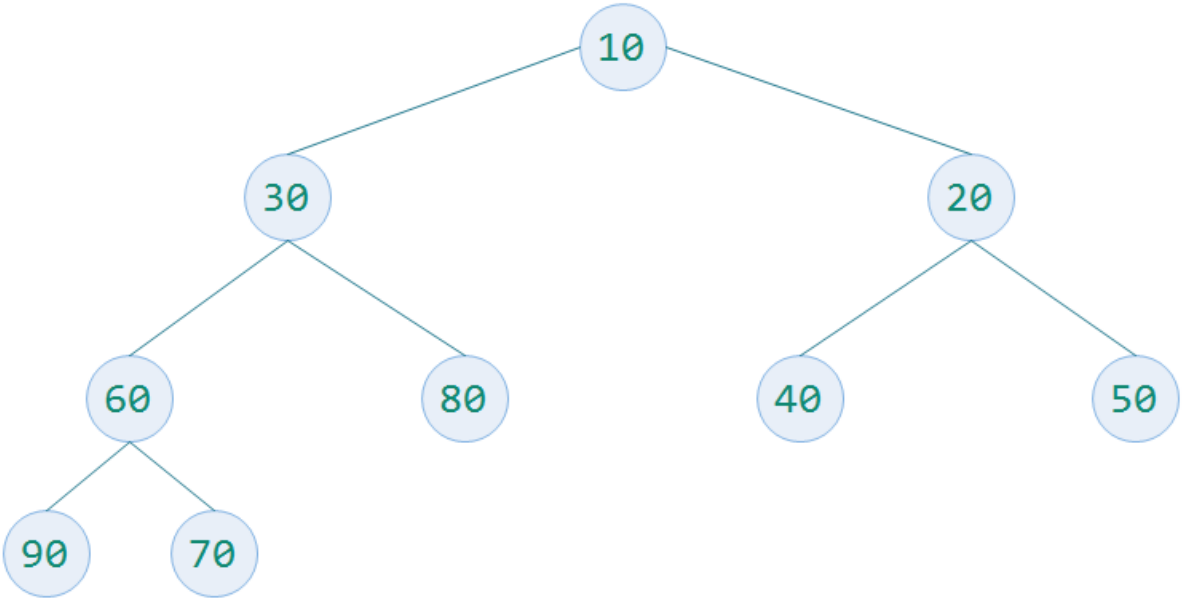
大顶堆

- 完全二叉树的每个非叶子结点都要大于或者等于其左右孩子结点的值称为大顶堆
- 根结点一定是大顶堆中的最大值



小顶堆

- 完全二叉树的每个非叶子结点都要小于或者等于其左右孩子结点的值称为小顶堆
- 根结点一定是小顶堆中的最小值



堆排序

1、构建完全二叉树

- 待排序数字为 80,90,70,40,50,10,60,20,30
- 构建一个完全二叉树存放数据，并根据性质5对元素编号，放入顺序的数据结构中
- 构造一个切片为[0,80,90,70,40,50,10,60,20,30]，这样索引就和性质5的编号一致了

2、单个结点调整

对于堆排序的核心算法就是单个堆结点的调整（以小顶堆为例）

1. 度数为2的结点A，如果它的左右孩子结点的最小值比它小，将这个最小值和该结点**交换**
2. 度数为1的结点A，如果它的左孩子的值小于它，则**交换**
3. 如果结点A被交换到新的位置，还需要和其孩子结点重复上面的过程

3、起点的选择

- 从完全二叉树的最后一个结点的双亲结点开始，即最后一层的最右边叶子结点的父结点开始
- 结点数为n，则起始结点的编号为n/2（性质5），由于构造了一个前置的0，所以编号和列表的索引正好重合，但是，元素个数n等于切片长度减1

4、下一个结点

按照二叉树性质5编号的结点，从起点开始找编号逐个递减的结点，直到编号1。最后保证构建一个真正的小顶堆

5、排序

1. 每次都要让堆顶的元素和最后一个结点交换，然后排除最后一个元素，形成一个新的被破坏的堆
2. 让它重新调整，调整后，堆顶一定是最小的元素
3. 再次重复第1、2步直至剩余一个元素

新增元素

首先必须用已有元素构建出小顶堆。注意这里**不用堆排序的第5步。**

插入元素到最后一个节点，与其父结点比较，看是否调整，不需调整则符合小顶堆，如需调整则和父结点交换。然后以父结点作为当前结点，再与其父结点比较，重复之前步骤。

```go
// heap.go
type Interface interface {
    Len() int
    Less(i, j int) bool
    Swap(i, j int)
}
type Interface interface {
    sort.Interface
    Push(x any) // add x as element Len()
    Pop() any   // remove and return element Len() - 1.
}
// 实现排序接口
// 实现Push、Pop方法
```

```go
package main

import (
    "container/heap"
    "fmt"
)

// 参考https://pkg.go.dev/container/heap#example-package-IntHeap
type IntHeap []int

// 实现排序接口方法，抄 sort.IntSlice。在VSCode中敲sort试试
func (h IntHeap) Len() int           { return len(h) }           // 长度就是数组长度
func (h IntHeap) Less(i, j int) bool { return h[i] < h[j] }      // 索引i和索引j内容直接比较大小
func (h IntHeap) Swap(i, j int)      { h[i], h[j] = h[j], h[i] } // 索引i、j互换

// 实现堆方法
func (h *IntHeap) Push(x any) {
    // Push and Pop use pointer receivers because they modify the slice's length,
    // not just its contents.
    *h = append(*h, x.(int))
}

func (h *IntHeap) Pop() any {
    old := *h
    n := len(old)
    x := old[n-1]
    *h = old[0 : n-1]
    return x
}

func main() {
    h := &IntHeap{80, 90, 70, 40, 50, 10, 60, 20, 30}
    heap.Init(h)
    fmt.Println(h)
    heap.Push(h, 75)
    fmt.Println(h)
    heap.Push(h, 15)
    fmt.Println(h)
    (*h)[0] = 45 // 破坏堆顶
    fmt.Println(h)
    heap.Fix(h, 0) // 对堆顶开始结点调整，一路向下
    fmt.Println(h)
}
```

应用

- 堆排序
- 取集合中最大的N个元素
    - 先从集合中取前N个元素构建小顶堆，假设它们就是最大的N个元素
    - 逐个遍历剩余其它元素，如果比堆顶元素小则直接丢弃（因为要最大的N个元素），否则替换堆顶，并向下调整